Paracuru-CE

Data: 25/01/2026

Autor: David Dias Marques

E-mail: davidmarquesdias4@gmail.com

Título: 015 - **Demonstração da média da soma de dois números consecutivos da forma 4k + 1**

PALAVRAS CHAVES:
Demonstrações, números de Fermat, 4k + 1, 4k + 3, 4k + 2, 4k + (2n), 4k + (2n + 1),

Pegando dois números de Fermat, ambos da forma 4k + 1, somando e dividindo por 2, obtemos um novo número sob a seguinte forma: 4k + 3.

Triângulo Numérico 15 - Média Aritmética[1]

Números de Fermat 4x + 1 e 4x + 3 e o Triângulo Numérico 15																
raízes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
quadrados	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
linha																
1		02	05	10	17	26	37	50	65	82	101	122	145	170	197	226
2		03	06	11	18	27	38	51	66	83	102	123	146	171	198	227
3			07	12	19	28	39	52	67	84	103	124	147	172	199	228
4			08	13	20	29	40	53	68	85	104	125	148	173	200	229
5				14	21	30	41	54	69	86	105	126	149	174	201	230
6				15	22	31	42	55	70	87	106	127	150	175	202	231
7					23	32	43	56	71	88	107	128	151	176	203	232
8					24	33	44	57	72	89	108	129	152	177	204	233
9						34	45	58	73	90	109	130	153	178	205	234
10						35	46	59	74	91	110	131	154	179	206	235
11							47	60	75	92	111	132	155	180	207	236
12							48	61	76	93	112	133	156	181	208	237
13								62	77	94	113	134	157	182	209	238
14								63	78	95	114	135	158	183	210	239
15									79	96	115	136	159	184	211	240
16									80	97	116	137	160	185	212	241
17										98	117	138	161	186	213	242
18										99	118	139	162	187	214	243
19											119	140	163	188	215	244
20											120	141	164	189	216	245
21												142	165	190	217	246
22												143	166	191	218	247
23													167	192	219	248
24													168	193	220	249
25														194	221	250
26														195	222	251
27															223	252
28															224	253
29																254
30																255
www.osfantasticosnumerosprimos.com.br																

a) números da forma 4x + 1 (amarelo)
b) números da forma 4x + 3 (verde)

O Triângulo Numérico 15 possui uma interessantíssima propriedade relacionada as formas 4x + 1 e 4x + 3 que as unem e que é a Média Aritmética.
A média aritmética de 2 números da forma 4x + 1 é um número da forma 4x + 3.

Exemplos:
(13 + 17) / 2 = 15 é da forma 4x + 3
(17 + 21) / 2 = 19 é da forma 4x + 3
(21 + 25) / 2 = 23 é da forma 4x + 3

A média aritmética de 2 números da forma 4x + 3 é um número da forma 4x + 1.
Exemplos:

(7 + 11) / 2 = 9 é da forma 4x + 1
(11 + 15) / 2 = 13 é da forma 4x + 1
(15 + 19) / 2 = 17 é da forma 4x + 1
Interessante observar que o padrão geométrico formado é semelhante a um tabuleiro de Jogo de Xadrez.

Triângulo Numérico 17

0																																		
1																1		3																
2																5		7																
3														9		11		13		15														
4														17		19		21		23														
5												25		27		29		31		33		35												
6												37		39		41		43		45		47												
7										49		51		53		55		57		59		61		63										
8										65		67		69		71		73		75		77		79										
9								81		83		85		87		89		91		93		95		97		99								
10								101		103		105		107		109		111		113		115		117		119								
11						121		123		125		127		129		131		133		135		137		139		141		143						
12						145		147		149		151		153		155		157		159		161		163		165		167						
13				169		171		173		175		177		179		181		183		185		187		189		191		193		195				
14				197		199		201		203		205		207		209		211		213		215		217		219		221		223				
15		225		227		229		231		233		235		237		239		241		243		245		247		249		251		253		255		
16		257		259		261		263		265		267		269		271		273		275		277		279		281		283		285		287	288	

DEMONSTRAÇÃO

1º NÚMERO
4B + 1

2º NÚMERO
4C + 1

Sendo C sucessor de B.

(4B + 1 + 4C + 1)A ÷ 2
(4(B + C) + 2) ÷ 2
2(B + C) + 1

Mas C é sucessor de B, logo C = B + 1

Substituindo essa informação em 2(B + C) + 1, adquirimos
2(B + B + 1) + 1
2(2B + 1) + 1
4B + 2 + 1
4B + 3

Trocando B por K, obtemos
$4k + 3$

Portanto a média da soma de dois números da forma 4k + 1 é sempre 4k + 3.
Todas as demais demonstrações que se seguirão estão fundamentadas na forma como foi feita a primeira acima.

UMA VISÃO ALÉM

SOMANDOS DOIS NÚMEROS CONSECUTIVOS DA FORMA 4K + 3

$(4B + 3 + 4C + 3) \div 2$
$(4(B + C) + 6) \div 2$
$2(B + C) + 3$
$C = B + 1$

Logo
$2(B + B + 1) + 3$
$2(2B + 1) + 3$
$4B + 2 + 3$
$[4B + 5]$
ou
$[4k + 5]$

UMA VISÃO GERAL

Média de dois números da forma 4k + 1 é
$4k + 3$
Média de dois números da forma 4k + 3 é
$4k + 5$
Média de dois números da forma 4k + 5 é
$4k + 7$
.
.
.

A média da soma de dois números consecutivos da forma 4k + n é 4k + (n + 2)
Pois

(4B + n + 4C + n) ÷ 2
(4(B + C) + 2n) ÷ 2
2(B + C) + n
Mas C = B + 1

logo

2(B + B + 1) + n
2(2B + 1) + n
4B + 2 + n
4B + (n + 2)
ou
4k + (n + 2)

PERCEPÇÃO GERAL SOBRE O ASSUNTO

Fazendo a média da soma de dois números consecutivos da forma 4k + n, obtemos um número da forma 4k + (n + 2).

Até agora utilizamos números ímpares de exemplos. Mas, e se n não for um número ímpar? For qualquer outro número inteiro positivo ou natural par? O que acontece, a propriedade se mantém?

Com base nesse pensamento, peguemos por exemplo dois números consecutivos da forma 4k + 2.

(4B + 2 + 4C + 2) ÷ 2
(4(B + C) + 4) ÷ 2
2(B + C) + 2

Mas C = B + 1

Logo

2(B + B + 1) + 2
2(2B + 1) + 2
4B + 2 + 2

4B + 4

ou
[4k + 4]

A percepção da propriedade geral parece funcionar muito bem até aqui. Vejamos o que ocorre de modo geral nos seguintes dois casos

CASO GERAL PAR

Peguemos a soma de dois números consecutivos da forma 4k + 2n e façamos sua média.

(4B + 2n + 4C + 2n) ÷ 2
(4(B + C) + 4n) ÷ 2
2(B + C) + 2n

Mas C = B + 1

Logo

2(2B + 1) + 2n
4B + 2 + 2n
4B + (2n + 2)

ou
[4k + (2n + 2)]

O que confirma a propriedade para números da forma acima com uma constante par.

CASO GERAL ÍMPAR

E se somarmos dois números consecutivos da forma 4k + (2n + 1) e fizermos sua média?

(4B + (2n + 1) + 4C + (2n + 1)) ÷ 2
(4(B + C) + 2(2n + 1)) ÷ 2
2(B + C) + (2n + 1)

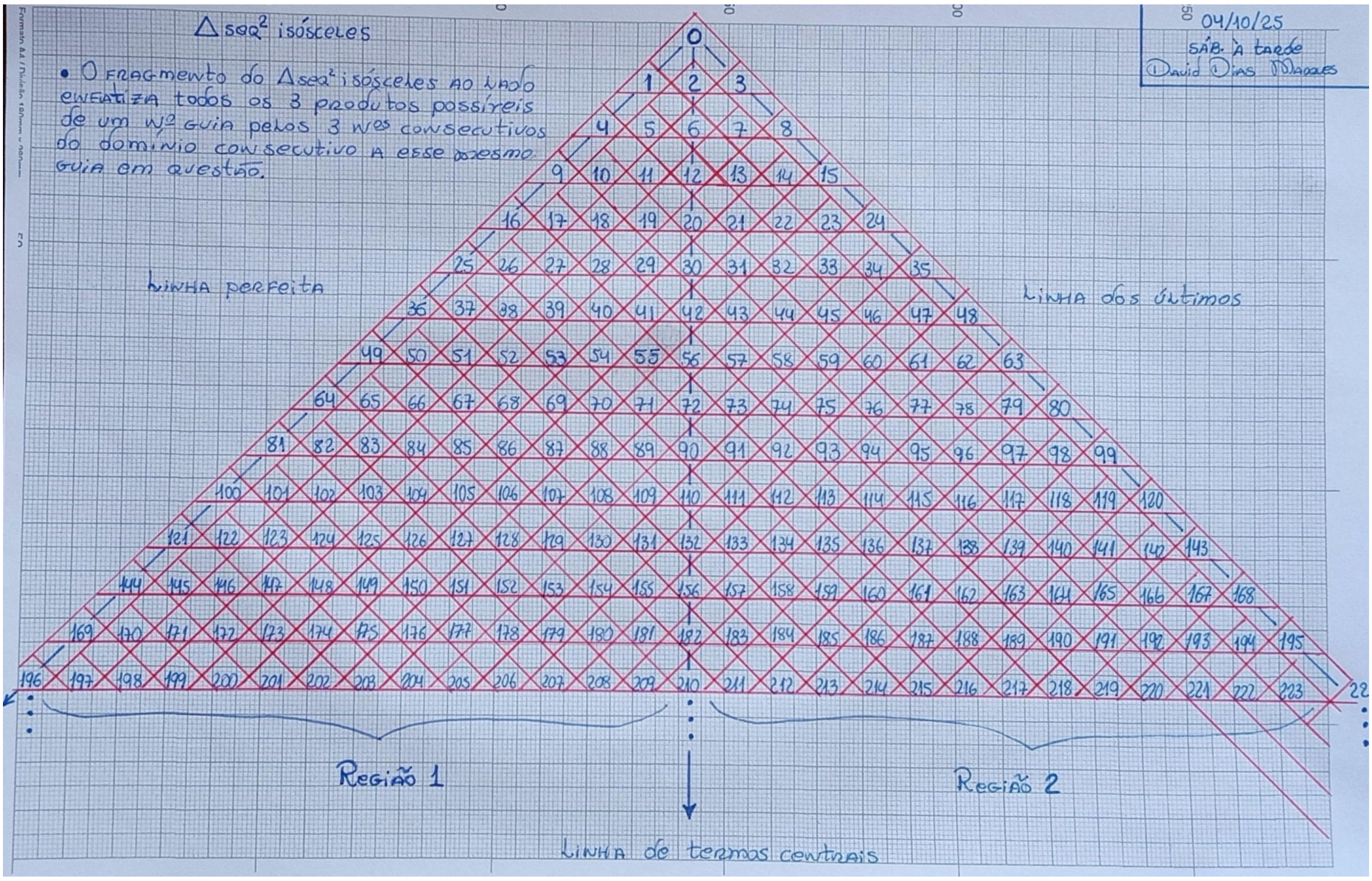
Mas C = B + 1

Logo

2(B + B + 1) + (2n + 1)
2(2B + 1) + (2n + 1)
4B + 2 + (2n + 1)
4B + (2n + 3)

ou
[4k + (2n + 3)]

O que confirma a propriedade para números da forma acima com uma constante ímpar.



MÉDIA ARITMÉTICA DA SOMA DE h FORMAS 4k + (2n + 1)

TESTE PARA 3 VALORES CONSECUTIVOS

(4B + (2n + 1) + 4C + (2n + 1) + 4D + (2n + 1)) ÷ 3

Veja que

B, C e D são valores consecutivos. De modo que, C = (B + 1) e D = (B + 2).

Tomando B como referencial.

Substituindo, obtemos, na média anteriormente acima, o seguinte resultado

(4(B + C + D) + 3(2n + 1)) ÷ 3

(4(B + B + 1 + B + 2) + 3(2n + 1)) ÷ 3

(4(3B + 3) + 3(2n + 1)) ÷ 3

(4(3B + 3) + 3(2n + 1)) ÷ 3

(12B + 12 + 6n + 3) ÷ 3

(12B + 6n + 15) ÷ 3

4B + (2n + 5)

ou

[4k + (2n + 5)]

A média da soma de 3 valores da forma 4k + (2n + 1) é 4k + (2n + 5).

TESTE PRA 4 VALORES CONSECUTIVOS

A média da soma de 4 valores da forma 4k + (2n + 1) é 4k + (2n + 7).

Pois

(4(B + C + D + E) + 4(2n + 1)) ÷ 4

(4(B + B + 1 + B + 2 + B + 3) + 4(2n + 1)) ÷ 4

(4(4B + 6) + 4(2n + 1)) ÷ 4

(4(4B + 6) + 4(2n + 1)) ÷ 4

(16B + 24 + 8n + 4) ÷ 4

(16B + 8n + 28) ÷ 4

4B + (2n + 7)

ou

[4k + (2n + 7)]

CONCLUSÕES PARA AS FORMAS EXPANDIDAS DE FERMAT DE CONSTANTES ÍMPARES CONSECUTIVAS

1. A média da soma de 2 valores da forma 4k + (2n + 1) é 4k + (2n + 3), se for adotado o valor de k que originou o número menor da soma, no caso o B. Sendo o valor da média representado por duas formas algébricas distintas.

2. A média da soma de 3 valores da forma 4k + (2n + 1) é 4k + (2n + 5), se for adotado o valor de k que originou o número menor da soma, no caso o B. Sendo o valor da média representado por três formas algébricas distintas.

3. A média da soma de 4 valores da forma 4k + (2n + 1) é 4k + (2n + 7), se for adotado o valor de k que originou o número menor da soma, no caso o B. Sendo o valor da média representado por quatro formas algébricas distintas.

4. A média da soma de 5 valores da forma 4k + (2n + 1) é 4k + (2n + 9), se for adotado o valor de k que originou o número menor da soma, no caso o B. Sendo o valor da média representado por cinco formas algébricas distintas.

.

.

.

m. A média da soma de h valores da forma 4k + (2n + 1) é 4k + (2(n + h) - 1), se for adotado o valor de k que originou o número menor da soma, no caso o B. Sendo o valor da média representado por h formas algébricas.

DEMONSTRAÇÃO DA AFIRMAÇÃO m

Afirmação proposta para a forma do menor valor de k, no caso o referencial B.

(4B + (2n + 1) + 4C + (2n + 1) + 4D + (2n + 1) + . . .) ÷ h

(4(B + C + D + . . . + Z) + h(2n + 1)) ÷ h

(4(hB + 1 + 2 + 3 + . . . + (h - 1)) + h(2n + 1)) ÷ h

4hB + 4(1 + 2 + 3 + . . . + (h - 1)) + h(2n + 1)) ÷ h

4B + (2n + 1) + 4(1 + 2 + 3 + . . . + (h - 1)) ÷ h

Veja que a soma 1 + 2 + 3 + . . . + (h - 1) = (h - 1)((h - 1) + 1) ÷ 2 ou h(h - 1) ÷ 2, substituindo

4B + (2n + 1) + 4(h(h - 1) ÷ 2) ÷ h

4B + (2n + 1) + 2h(h - 1) ÷ h

4B + (2n + 1) + 2(h - 1)

4B + 2n + 1 + 2h - 2

4B + 2(n + h) - 1

ou

[4k + (2(n + h) - 1)]

UMA INFORMAÇÃO A MAIS SOBRE AS ESTRUTURAS DAS FORMAS DE FERMAT

CASO DA SOMA DE DUAS PARCELAS

Quando é feita uma média da soma de duas parcelas de números cuja forma possui uma constante ímpar (m), e se quer forçá-la para uma constante ímpar menor, inconsciente dos formalismos de uma demonstração, sendo guiado apenas pela própria intuição, basta diminuir duas unidades de (m) e utilizar o k do número maior de tal soma. Lembrando que estamos utilizando variações dos números de Fermat, sendo eles 4k + 1 e 4k + 3.

EXEMPLO PRÁTICO:

(7 + 11) ÷ 2 é 9.

7 e 11 são números da forma 4k + 3
9 é da forma 4k + 1, pois 9 = 4(2) + (3 - 2)

Mas, (nove) também pode surgir da forma 4k + 5. Pois, 9 = 4(1) + (3 + 2). O números nove pode assumir duas formas possíveis sem tirar a soma:a

Forma 1: 4k + 1
Forma 2: 4k + 5

Estas duas formas geram o número (9).

A diferença está no valor do k e do referencial utilizado.

Veja, se eu utilizar o valor de k da composição algébrica do primeiro, devo diminuir duas unidades da constante ímpar, da forma 4k + 3.

Agora, se eu utilizar o valor de k da composição algébrica do segundo, devo acrescentar duas unidades a constante ímpar, da forma 4k + 3, que é nossa expressão fundamental para esses cálculos.

Tudo, aqui, vai depender do refencial em que se está calculando.

Portanto, afirmar que algo tende a uma certa forma é um equívoco causado por um viés comum, o de confirmação. E talvez o fervor da euforia.

EXEMPLOS PRÁTICOS

1. Duas parcelas

Forma de referência dos números: 4k + 3

Média de termos consecutivos: (3 + 7) ÷ 2 = 5

Duas formas possíveis: (4k + 5) e (4k + 1)

Houve uma diminuição em quatro unidades da constante 5, parando na constante

1. Desse modo é possível utilizar todos os valores de k, que originaram os dois valores somados.

2. Três parcelas

Forma de referência dos números: 4k + 3

Média de termos consecutivos: (3 + 7 + 11) ÷ 3 = 7

Três formas possíveis: (4k + 7), (4k + 3) e (4k - 1)

Houve uma diminuição em quatro unidades da constante 7, indo até a constante 3 e desta finalizando na constante - 1. Desse modo é possível utilizar todos os valores de k, que originaram os três valores somados.
4. Quatro parcelas

Forma de referência dos números: 4k + 3

Média de termos consecutivos: (3 + 7 + 11 + 15) ÷ 4 = 9

Quatro formas possíveis: (4k + 9), (4k + 5), (4k + 1), (4k - 3)

Houve uma diminuição em quatro unidades da constante 9, indo até a constante 5, do 5 para o 1 e deste finalizando na constante - 3. Desse modo é possível utilizar todos os valores de k, que originaram os quatro valores somados.
.
.
.

SOBRE OS REFERENCIAIS E FORMAR POSSÍVEIS

EXEMPLO 1, REFERENCIAL (B)

FORMA DE REFERÊNCIA: 4K + 3

NÚMERO DE PARCELAS DA MÉDIA: 3

SOMA:

$(4B + 3 + 4C + 3 + 4D + 3) \div 3$

Colocando todos os termos em função de B

$C = (B + 1)$ e $D = (B + 2)$, logo

$(4(B + C + D) + 9) \div 3$

$(4(3B + 3) + 9) \div 3$

$(12B + 12 + 9) \div 3$

$[4B + 7]$

EXEMPLO 2, REFERENCIAL (C)

FORMA DE REFERÊNCIA: 4K + 3

NÚMERO DE PARCELAS DA MÉDIA: 3

SOMA:

$(4B + 3 + 4C + 3 + 4D + 3) \div 3$

Colocando todos os termos em função de C

$B = (C - 1)$ e $D = (C + 1)$, logo

$(4(B + C + D) + 9) \div 3$

(4(3C) + 9) ÷ 3

(12C + 9) ÷ 3

[4C + 3]

EXEMPLO 3, REFERENCIAL (D)

FORMA DE REFERÊNCIA: 4K + 3

NÚMERO DE PARCELAS DA MÉDIA: 3

SOMA:

(4B + 3 + 4C + 3 + 4D + 3) ÷ 3

Colocando todos os termos em função de C

B = (D - 2) e C = (D - 1), logo

(4(B + C + D) + 9) ÷ 3

(4(3D - 3) + 9) ÷ 3

(12D - 12 + 9) ÷ 3

(12D - 3) ÷ 3

[4D - 1]

Por que limitar o resultado de uma média a uma quantidade finita de formas, indo de acordo com o número de parcelas? É uma pergunta válida. Porque esses números de formas concordam com a quantidade de termos da soma da média. Visto que são os valores definidos para tal análise que fundamentam o limite da quantidade de formas de expressar tal resultado através de produto e soma, ou subtração.

Referências:

http://www.osfantasticosnumerosprimos.com.br/011-estudos-599-numeros-fermat-4-x-mais-1-e-o-triangulo-numerico-15.html

http://www.osfantasticosnumerosprimos.com.br/imagem-06-colaboradores/david-dias-marques-2025-009%20-o-triangulo-numerico-15-e-a-espiral-de-ulam.pdf